

ĐỀ BÀI TẬP

Chương 1. SỐ PHỨC

Câu 1. Thực hiện các phép tính sau dưới dạng đại số

$$\begin{array}{llll} 1) \frac{\overline{3i - (1+i)^3}}{(2+i)^2 \cdot 1+2i} & 2) \frac{(1+i)(2-i)^3}{(2+i)^2 - (1+2i)} & 3) \frac{(1+i)^2 - \overline{5i}}{(1-i)^3 + (1+i)^2} & 4) \frac{(2+3i)^2 + (2-3i)^2}{(5+4i)^2 \cdot 5+4i} \\ 5) \frac{\overline{3-i} \cdot \overline{(3+i)^2}}{(4-3i)^2} & 6) \frac{(1+3i)^2 - \overline{-2i}}{(3-i)(2+3i)} & 7) \frac{(-4i)^5 + \overline{5i+i^3}}{(2-i)^2} & 8) \frac{\overline{(1+4i)^2 - (3-2i)}}{(-i) + (1+2i)^2} \end{array}$$

Câu 2. Tính modun của các số phức sau

$$\begin{array}{lll} 1) z = \frac{(4-3i)^{12}(5+7i)^3}{(2+i)^{24}} & 2) z = \frac{(5+12i)^{26} \left(\sqrt{3} + 2i\sqrt{6} \right)^2}{(10-24i)^{20}} & 3) z = \frac{\left(\sqrt{3} + i\sqrt{6} \right)^{22}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2} \left(3+3i\sqrt{3} \right)^{20}} \\ 4) z = \frac{\left(\sqrt{3} - i \right)^{30} (-5+4i)^5}{\left(\sqrt{6} - i\sqrt{3} \right)^{32}} & 5) z = \frac{\left(3\sqrt{3} - 3i \right)^{12} \left(5-12i \right)^5}{\left(-2+2i\sqrt{3} \right)^{10}} & 6) z = \frac{\left(-\sqrt{6} + i\sqrt{3} \right)^{32}}{\left(1+i\sqrt{2} \right)^7 \left(3-i \right)^{28}} \end{array}$$

Câu 3. Thực hiện các phép tính sau dưới dạng lượng giác và dạng mũ

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{(1-i\sqrt{3})(5+5i)^3}{\left(\sqrt{3} + i\sqrt{6} \right)^2} & 2) \frac{\left(3+3i\sqrt{3} \right)^2 \left(\sqrt{3} + i\sqrt{6} \right)^2}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} & 3) \frac{\left(\sqrt{3} + i\sqrt{6} \right)^2}{\sqrt{2} + i\sqrt{2} \left(3+3i\sqrt{3} \right)^2} \\ 4) \frac{\left(\sqrt{3} - i \right)(-4+4i)^3}{\left(\sqrt{6} + i\sqrt{3} \right)^2} & 5) \frac{\left(3\sqrt{3} - 3i \right)^2 \left(\sqrt{8} + i\sqrt{8} \right)^2}{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}} & 6) \frac{\left(-\sqrt{6} + i\sqrt{3} \right)^2}{-\sqrt{2} + i\sqrt{2} \left(3-3i \right)^2} \end{array}$$

Câu 4. Xác định argument chính $\varphi \in (-\pi; \pi]$ của các số phức sau

$$\begin{array}{lll} 1) z = \frac{(1+i)^4 \left(\sqrt{3} - i\sqrt{6} \right)^3}{\sqrt{3} + i} & 2) z = \frac{\left(\overline{1+i} \right) \left(\sqrt{3} + i \right)^3}{(-1-i)^4} & 3) z = \frac{(1+i)^7}{(1-i)^5 \left(2\sqrt{6} - 2i\sqrt{3} \right)^4} \\ 4) z = \frac{(1+i)^4 \cdot \overline{\sqrt{3} + i}}{\left(\sqrt{3} - i\sqrt{6} \right)^3} & 5) z = \frac{\left(\overline{1+i} \right)^4}{(-1-i)^4 \left(\sqrt{3} + i \right)^3} & 6) z = \frac{(1+i)^7 (1-i)^5}{\left(2\sqrt{6} - 2i\sqrt{3} \right)^4} \end{array}$$

Câu 5*. Cho các số phức z sau có argument chính là $\varphi \in (-\pi; \pi]$. Hãy viết z dưới dạng đại số và dạng mũ, từ đó suy ra $\cos \varphi$ và $\sin \varphi$ (không dùng máy tính!)

$$\begin{array}{llll}
1) z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} & 2) z = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{1 + i\sqrt{3}} & 3) z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} - i\sqrt{6}} & 4) z = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{1 + i\sqrt{3}} \\
5) z = \frac{\sqrt{3} - i}{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}} & 6) z = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{1 + i\sqrt{3}} & 7) z = \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{2} - i\sqrt{6}} & 8) z = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{\sqrt{3} + i}
\end{array}$$

Câu 6. Dùng công thức Moirve, hãy tìm căn bậc bốn của các số phức trong câu 5 ở trên.

Câu 7. Trong mặt phẳng phức, hãy xác định tập hợp các điểm z thỏa mãn điều kiện sau

$$\begin{array}{llll}
1) 1 \leq |z + i| < 3 & 2) |z - 1 + i| \leq 1 & 3) \operatorname{Im}(\bar{z} - i) \leq 2 & 4) \operatorname{Re}(iz) > 1 \\
5) |2z - i| = 4 & 6) |z - 1| + |z + 1| = 4 & 7) 0 < \operatorname{Re}(iz) \leq 1 & 8) \operatorname{Im}(z - i) \geq 3
\end{array}$$

Câu 8. Giải các phương trình sau trên trường số phức

$$\begin{array}{llll}
1) z^4 - 5z^2 + 7 = 0 & 2) z^4 - 7z^2 + 25 = 0 & 3) z^4 - 3z^2 + 9 = 0 & 4) z^4 + 3z = 0 \\
5) z^4 + 3z^2 + 7 = 0 & 6) z^4 + 4z^2 + 17 = 0 & 7) z^4 + 6z^2 + 17 = 0 & 8) z^4 - 8z = 0
\end{array}$$

Câu 9*. Giải các phương trình sau trên trường số phức

$$\begin{array}{ll}
1) z^3 + (3 + 2i)z^2 + (5 + 8i)z + 3 + 6i = 0 & 2) z^3 + (1 + 2i)z^2 + (1 + 4i)z - 3 - 6i = 0 \\
3) z^3 + (4 - 3i)z^2 + (1 - 9i)z - 2 - 6i = 0 & 4) z^3 + (2 - 3i)z^2 - (5 + 3i)z + 2 + 6i = 0 \\
5) z^3 + (2 + 4i)z^2 + (5 + 8i)z + 10 = 0 & 6) z^3 - (2 - 4i)z^2 + (5 - 8i)z - 10 = 0
\end{array}$$

.....

Chương 2. HÀM BIẾN PHỨC

Câu 1. Tính các giá trị $f(z_0)$ sau

$$\begin{array}{ll}
1) f(z) = i \operatorname{Re}(i\bar{z} - 2z^3), z_0 = \sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{6}} & 2) f(z) = \frac{z^2 - iz}{\bar{z}}, z_0 = \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \\
3) f(z) = i \operatorname{Im}(\bar{z}^3 + iz), z_0 = \sqrt{2}.e^{-i\frac{2\pi}{3}} & 4) f(z) = \frac{z^2}{3z - i\bar{z}}, z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \\
5) f(z) = \frac{i(\bar{z}^2 - 2iz^3)}{z}, z_0 = \sqrt{3}.e^{i\frac{5\pi}{6}} & 6) f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z^2 - iz)}{i\bar{z}}, z_0 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
7) f(z) = (i\bar{z}^2 + z^2)^4, z_0 = i\sqrt{3} - 1 & 8) f(z) = 2iz^3 + 4\bar{z}^2, z_0 = 3 - i\sqrt{2}
\end{array}$$

Câu 2. Xác định phần thực và phần ảo của các hàm biến phức sau

$$\begin{array}{llll}
1) f(z) = i(i\bar{z} - 2z^3) & 2) f(z) = -i \frac{z - 1}{\bar{z}} & 3) f(z) = ie^{i\bar{z}} & 4) f(z) = \frac{z}{z - i\bar{z}} \\
5) f(z) = \cos(iz) - i.\sin(iz) & 6) f(z) = \cos(i\bar{z}) - \sin(i\bar{z}) & 7) f(z) = e^{\overline{i\bar{z}}} & 8) f(z) = \frac{e^{\bar{z}^2}}{i}
\end{array}$$

Câu 3. Xét tính khả vi của hàm $f(z)$ và tính đạo hàm (nếu có) tại điểm $z_0 = x_0 + iy_0$ thuộc miền khả vi

$$\begin{array}{llll}
1) f(z) = \bar{z}^2 . \operatorname{Im}(iz) & 2) f(z) = e^{i\bar{z}^2} & 3) f(z) = z . \operatorname{Im}(i\bar{z}^2) & 4) f(z) = i.e^{\bar{z}} \\
5) f(z) = z \operatorname{Re}(iz - |z|^2) & 6) f(z) = e^{|z-1|^2} & 7) f(z) = |z| . (iz) & 8) f(z) = e^{|\bar{z}^2 - i|}
\end{array}$$

Câu 4. Chứng tỏ các hàm sau là hàm điều hòa và tìm hàm giải tích $f(z) = u + iv$ theo biến z , biết

1) $u(x, y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3$ và $f(-i) = \frac{i}{2}$

2) $v(x, y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3$ và $f(i) = \frac{2i}{3}$

3) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ và $f(1 - i) = 1$

4) $v(x, y) = x^3 - 3xy^2$ và $f(1 + i) = -i$

5) $u(x, y) = e^x \cos y - y$

6) $v(x, y) = e^y \cos x + 2x$

7) $u(x, y) = e^x \sin y - y$

8) $v(x, y) = e^y \sin x + 2x$

.....

Chương 3. TÍCH PHÂN HÀM PHỨC

Câu 1. Viết phương trình tham số của các đoạn thẳng (hoặc đường parabol) C theo tham số t và tìm khoảng biến thiên của t dưới dạng $t : a \rightarrow b$ trong các trường hợp sau

1) C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = 3 - 2i$ đến điểm $z = -1 + 3i$.

2) C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = -5 - 2i$ đến điểm $z = -7 + 3i$.

3) C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = 3 + 2i$ đến điểm $z = -1 - 3i$.

4) C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = -1 - 4i$ đến điểm $z = -4 - i$.

5) C là parabol $y = x^2 - 2x$ nối từ điểm $z = 1 - i$ đến điểm $z = -2 + 8i$.

6) C là parabol $y = -x^2 - 3x$ nối từ điểm $z = 1 - 4i$ đến điểm $z = -1 + 2i$.

7) C là parabol $y = 2x^2 - x$ nối từ điểm $z = 1 + i$ đến điểm $z = -2 + 10i$.

8) C là parabol $y = 2x^2 + x$ nối từ điểm $z = 1 + 3i$ đến điểm $z = -1 + i$.

Câu 2. Viết phương trình tham số của các đường tròn (hoặc đường elip) C theo tham số t và tìm khoảng biến thiên của t dưới dạng $t : a \rightarrow b$ trong các trường hợp sau

1) C là đường tròn $|z - 1 - i| = 1$ nối từ điểm $z = 2 + i$ đến điểm $z = 1 + 2i$ theo chiều âm.

2) C là đường tròn $|z - 1 - i| = 1$ nối từ điểm $z = 1$ đến điểm $z = i$ theo chiều dương.

3) C là đường tròn $|z + 2i| = 1$ nối từ điểm $z = -3i$ đến điểm $z = 1 - 2i$ theo chiều âm.

4) C là đường tròn $|z + 1 + 2i| = 1$ nối từ điểm $z = -2i$ đến điểm $z = -2 - 2i$ theo chiều âm.

5) C là đường elip $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ nối từ điểm $z = 2$ đến điểm $z = -i$ theo chiều dương.

6) C là đường elip $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ nối từ điểm $z = 2i$ đến điểm $z = -1$ theo chiều âm.

7) C là đường elip $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ nối từ điểm $z = -3i$ đến điểm $z = -2$ theo chiều âm.

8) C là đường elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ nối từ điểm $z = -2i$ đến điểm $z = 3$ theo chiều dương.

Câu 3. Tính các tích phân sau

1) $I = \int_C \bar{z}^2 \cdot \operatorname{Re}(iz) dz$, C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = -2i$ đến điểm $z = -1 + 3i$.

2) $I = \int_C \bar{z}^2 \cdot \operatorname{Im}(iz) dz$, C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = i$ đến điểm $z = -1 - i$.

3) $I = \int_C \bar{z}^2 \cdot (z^2 - iz) dz$, C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = 2i$ đến điểm $z = -3i$.

4) $I = \int_C \bar{z}^2 \cdot (2z - iz^2) dz$, C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = 3$ đến điểm $z = -1$.

5) $I = \int_C \bar{z} dz$, C có phương trình $\begin{cases} x = 2t^2 - 2t \\ y = t \end{cases}$ nối từ điểm $A(4; -1)$ đến điểm $B(4; 2)$.

6) $I = \int_C \bar{z} dz$, C có phương trình $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ nối từ điểm $A(0; -1)$ đến điểm $B(-2; 0)$ theo chiều âm.

7) $I = \int_C \bar{z}^2 dz$, $C : |z - i| = 1$ nối từ điểm $z = 0$ đến điểm $z = 1 + i$ theo chiều âm.

8) $I = \int_C \frac{dz}{z^2}$, $C : |z| = \sqrt{2}$ nối từ điểm $z = -1 - i$ đến điểm $z = 1 + i$ theo chiều dương.

Câu 4. Áp dụng tích phân Cauchy, tính các tích phân sau

1) $I = \oint_{|z+2+i|=1} \frac{dz}{z^2 + 4z + 5}$

2) $I = \oint_{|z+3-i|=2} \frac{z-1}{z^2 + 4z} dz$

3) $I = \oint_{|z-4+i|=3} \frac{z+2}{z^2 - 3z} dz$

4) $I = \oint_{|z+2i|=1} \frac{dz}{z^4 + 5z^2 + 4}$

5) $I = \oint_{|z+2i|=2} \frac{dz}{z^4 + 4z^2}$

6) $I = \oint_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^3 - 1}$

Câu 5. Áp dụng tích phân Cauchy, tính các tích phân sau

1) $I = \oint_{|z-1|=3} \frac{dz}{z^2 - 2z + 5}$

2) $I = \oint_{|z-2|=2} \frac{dz}{z^2 - 4z + 5}$

3) $I = \oint_{|z-1|=4} \frac{dz}{z^2 - 2z + 10}$

4) $I = \oint_{|z-2i|=2} \frac{dz}{z^4 + 5z^2 + 4}$

5) $I = \oint_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{z^4 - 1}$

6) $I = \oint_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^3 - 3z}$

Câu 6. Áp dụng tích phân Cauchy, tính các tích phân sau

1) $I = \oint_{|z+3|=2} \frac{z+3}{(z^2 + 4z)^2} dz$

2) $I = \oint_{|z-i|=2} \frac{z-1}{(z^2 + 4)^2} dz$

3) $I = \oint_{|z-4+i|=3} \frac{z-1}{(z^2 - 3z)^2} dz$

4) $I = \oint_{|z+i|=1} \frac{dz}{z^2(z-i)^3}$

5) $I = \oint_{|z+2|=1} \frac{dz}{z^2(z-2)^3}$

6) $I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^3(z-1)}$

Câu 7*. Áp dụng tích phân Cauchy, tính các tích phân sau

1) $I = \int_C \frac{dz}{z^2 + 1}$, C là cung tròn $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 3)^2 = \frac{45}{4}$ nối $z = 2$ với $z = -1$ theo chiều âm.

2) $I = \int_C \frac{dz}{z^2 + 1}$, C là cung tròn $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ nối $z = -1$ với $z = 2$ theo chiều dương.

3) $I = \int_C \frac{dz}{z^2 + 4}$, C là cung tròn $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ nối $z = 3$ với $z = -1$ theo chiều âm.

4) $I = \int_C \frac{dz}{z^2 + 4}$, C là cung tròn $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$ nối $z = -1$ với $z = 3$ theo chiều dương.

5) $I = \int_C \frac{dz}{z^2 + 9}$, C là cung tròn $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 13$ nối $z = 3$ với $z = -1$ theo chiều âm.

6) $I = \int_C \frac{dz}{z^2 + 4}$, C là cung tròn $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 13$ nối $z = -1$ với $z = 3$ theo chiều dương.

.....

Chương 4. CHUỖI VÀ THẶNG DƯ

Câu 1*. Tìm hình tròn hội tụ của các chuỗi

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z+n}{2nz} \right)^n \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{n!} \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (z-1)^n$$

Câu 2*.

2.1. Khai triển Taylor các hàm số sau tại điểm $z = a$

$$1) f(z) = \frac{1}{z}, a = i \quad 2) f(z) = \frac{z-1}{z+1}, a = 0 \quad 3) f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}, a = 0$$

2.2. Khai triển Laurent của hàm số $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$ trong các trường hợp sau

$$1) \text{ trong miền } |z| < 1 \quad 2) \text{ trong miền } |z| > 2 \quad 3) \text{ trong miền } 0 < |z+1| < 1$$

Câu 3*. Khai triển Laurent các hàm số sau trong lân cận điểm bất thường cô lập đã chỉ ra và gọi tên các điểm bất thường cô lập đó

$$1) f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}, \text{ tại } z = 1 \quad 2) f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2}, \text{ tại } z = -1$$

$$3) f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}, \text{ tại } z = -2 \quad 4) f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}, \text{ tại } z = 0$$

$$5) f(z) = (z-1) \cos \frac{1}{z-1}, \text{ tại } z = 1 \quad 6) f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}, \text{ tại } z = i$$

Câu 4. Tìm, phân loại các điểm bất thường cô lập hữu hạn và tính thặng dư của các hàm số tại các điểm đó

$$1) f(z) = \frac{z+2}{z(z-1)^3} \quad 2) f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3(z^2-4)} \quad 3) f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2}$$

$$4) f(z) = \frac{1}{(z^2-2z+2)^2} \quad 5) f(z) = \frac{z^4}{(z+1)^3} \quad 6) f(z) = \frac{e^z}{z^3-1}$$

$$7) f(z) = \frac{z}{z^4+5z^2+4} \quad 8) f(z) = \frac{z-2i}{(z^2+4)^2} \quad 9) f(z) = \frac{1}{z^4+i}$$

Câu 5. Tính thặng dư tại ∞ của các hàm số sau

$$1) f(z) = \frac{z^2}{z^4-2} \quad 2) f(z) = \frac{1}{z^7-z} \quad 3) f(z) = \frac{z^2}{z^9+2}$$

$$4) f(z) = \frac{1}{z^2(z^3-1)} \quad 5) f(z) = \frac{z^3}{2-z^7} \quad 6) f(z) = \frac{z}{z^{10}-3}$$

$$7) f(z) = \frac{1}{z^4(3-z^2)} \quad 8) f(z) = \frac{z^2}{1-3z^7} \quad 9) f(z) = \frac{1}{2z^6+1}$$

Câu 6. Áp dụng thặng dư tính các tích phân phức sau

$$1) I = \oint_C \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2 - 1} dz, \quad C : x^2 + y^2 = 2x.$$

$$2) I = \oint_C \frac{\cos z}{z^2 - 1} dz, \quad C \text{ là chu vi tam giác có các đỉnh là } z = 0, z = 2 - 2i \text{ và } z = 2 + 2i.$$

$$3) I = \oint_C \frac{z^2 dz}{z^2 + 4}, \quad C \text{ là biên của hình vuông có các đỉnh là } z = \pm 2, z = \pm 2 + 4i.$$

$$4) I = \oint_C \frac{e^{iz} dz}{4z^2 - \pi^2}, \quad C : |z - i| = 2.$$

$$5) I = \oint_C \frac{dz}{z^3 + 1}, \quad C \text{ là elip } 2x^2 + y^2 = \frac{3}{2}.$$

$$6) I = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^3(z^{10} - 2)}.$$

Câu 7. Áp dụng thặng dư tính các tích phân thực dạng lượng giác sau

$$1) I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - 3 \sin t}$$

$$2) I = \int_0^{\pi} \frac{dt}{5 + 4 \cos t}$$

$$3) I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + \sin t}$$

$$4*) I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t dt}{5 - 3 \cos t}.$$

$$5) I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - 3 \cos t}$$

$$6) I = \int_0^{\pi} \frac{dt}{3 - 2 \cos t}$$

$$7) I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}$$

$$8*) I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t dt}{3 - 2 \cos t}.$$

Câu 8. Áp dụng thặng dư tính các tích phân thực suy rộng sau

$$1) I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 16}$$

$$2) I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

$$3) I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^2}$$

$$4) I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$$

$$5) I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}$$

$$6) I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$

$$7*) I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 1} dx$$

$$8*) I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 4)^2} dx$$

.....

Chương 5. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

Câu 1. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc sau

$$1) f(t) = e^t \cos 3t - 3e^{-2t} \sin 4t + \frac{t^3}{e^{5t}}$$

$$2) f(t) = e^{-t} \sin 2t - 3e^{2t} \cos \frac{t}{2} + t^4 e^{-3t}$$

$$3) f(t) = (t^5 - 2t^2 + 4)e^{-3t} + \frac{2 \cos 3t}{e^{2t}}$$

$$4) f(t) = (t^5 + t^2 - 3t)e^{2t} + \frac{\sin 3t}{e^{-t}}$$

$$5) f(t) = 3te^{2t}u(t-2)$$

$$6) f(t) = (t-1)e^{-t}u(t-3)$$

$$7) f(t) = 3t^2 \sin 2t - t \cos 3t$$

$$8) f(t) = 2t^2 \cos 3t + (t-1) \sin 2t$$

Câu 2. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc sau

$$1) f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ t^2 - 2t, & 3 \leq t < 4 \\ 1 - 3t, & t \geq 4 \end{cases}$$

$$2) f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ t^2 + 5t, & 2 \leq t < 5 \\ 4 - 3t, & t \geq 5 \end{cases}$$

$$3) f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ -2t^2, & 3 \leq t < 4 \\ t^2 - 2t, & t \geq 4 \end{cases}$$

$$4) f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ -4t^2, & 2 \leq t < 5 \\ t^2 + 5t, & t \geq 5 \end{cases}$$

$$5) f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ \sin 2t, & \pi \leq t < \frac{3\pi}{2} \\ 0, & t \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$6) f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ \cos 2t, & \pi \leq t < \frac{3\pi}{2} \\ 0, & t \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Câu 3. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc tuần hoàn sau

$$1) f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t < 3 \\ t^2 - 2t, & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}, T = 4$$

$$2) f(t) = \begin{cases} 3t, & 0 \leq t < 2 \\ t^2 + 5t, & 2 \leq t \leq 5 \end{cases}, T = 5$$

$$3) f(t) = \begin{cases} t^2 - 2t, & 0 \leq t < 1 \\ -2t^2, & 1 \leq t \leq 3 \end{cases}, T = 3$$

$$4) f(t) = \begin{cases} 2 - t^2, & 0 \leq t < 2 \\ 2t^2 + t, & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}, T = 3$$

$$5) f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \pi \\ \sin 2t, & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}, T = 2\pi$$

$$6) f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \pi \\ \cos 2t, & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}, T = 2\pi$$

Câu 4. Tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm ảnh sau

$$1) F(s) = \frac{s-5}{s^2+8s+25} + \frac{s}{s^2+8s+16}$$

$$2) F(s) = \frac{3-s}{s^2-8s+25} + \frac{s}{s^2-8s+16}$$

$$3) F(s) = \frac{s}{s^2+10s+29} + \frac{4-s}{s^2+10s+25}$$

$$4) F(s) = \frac{s}{s^2-10s+29} + \frac{4-s}{s^2-10s+25}$$

$$5) F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 4} + \frac{e^{-3s}}{s^2 + 10s + 25}$$

$$6) F(s) = \frac{se^{-5s}}{s^2 + 9} + \frac{e^{-s}}{s^2 - 10s + 25}$$

$$7) F(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2 + 2s + 5}$$

$$8) F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 - 6s + 18}$$

Câu 5. Bằng cách phân tích thành phân thức tối giản, tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm ảnh sau

$$1) F(s) = \frac{s^2 - 5s}{s^3 + 2s^2 - 11s - 12}$$

$$2) F(s) = \frac{s^2 - 5s + 3}{s^3 - 13s + 12}$$

$$3) F(s) = \frac{s}{s^3 + 3s^2 - 10s - 24}$$

$$4) F(s) = \frac{s}{s^3 - s^2 - 14s + 24}$$

$$5) F(s) = \frac{s - 1}{(s^2 + 1)(s - 4)}$$

$$6) F(s) = \frac{s + 2}{(s^2 + 4)(s + 9)}$$

$$7) F(s) = \frac{s - 3}{s(s - 1)^2}$$

$$8) F(s) = \frac{s + 1}{s(s + 2)^2}$$

Câu 6. Sử dụng thặng dư, tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm ảnh sau

$$1) F(s) = \frac{s}{(s - 1)^2(s + 2)^2}$$

$$2) F(s) = \frac{s}{(s - 1)^3(s + 2)}$$

$$3) F(s) = \frac{s - 2}{(s - 3)^2(s + 2)^2}$$

$$4) F(s) = \frac{s - 1}{(s - 2)(s + 1)^3}$$

$$5) F(s) = \frac{s}{(s - i)(s^2 + 1)}$$

$$6) F(s) = \frac{s}{(s - 2i)(s^2 + 4)}$$

$$7) F(s) = \frac{1}{(s - i)(s^2 + 2is + 3)}$$

$$8) F(s) = \frac{1}{(s + 3i)(s^2 + 2is + 3)}$$

Câu 7*. Sử dụng tích chập, tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm ảnh sau

$$1) F(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 2)}$$

$$2) F(s) = \frac{s}{(s^2 + 4)(s^2 + 3)}$$

$$3) F(s) = \frac{3}{(s^2 + 1)s^3}$$

$$4) F(s) = \frac{1}{s^3(s^2 + 4)}$$

$$5) F(s) = \frac{s}{(s + 1)^2(s^2 + 1)}$$

$$6) F(s) = \frac{s}{(s - 2)^2(s^2 + 4)}$$

$$7) F(s) = \frac{2-s}{(s^2+4)^2}$$

$$8) F(s) = \frac{3-s}{(s^2+9)^2}$$

Câu 8. Dùng biến đổi Laplace giải các phương trình vi phân cấp một sau

$$1) y' + 2y = 3e^{-2t}; y(0) = 1$$

$$2) y' - 2y = 3e^{2t}; y(0) = -1$$

$$3) y' + 5y = 3e^{-5t}; y(0) = -2$$

$$4) y' - 6y = -e^{6t}; y(0) = 3$$

$$5) y' + 4y = -2e^{-t}$$

$$6) y' - 7y = -e^t$$

$$7) y' + 2y = t; y(0) = 1$$

$$8) y' - 2y = t; y(0) = -2$$

Câu 9. Dùng biến đổi Laplace giải các phương trình vi phân cấp hai sau

$$1) y'' - 3y' + 2y = e^{3t}; y(0) = 1, y'(0) = -1 \quad 2) y'' + 4y' + 3y = e^{-2t}; y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$3) y'' - 3y' + 2y = e^t; y(0) = 0, y'(0) = -1 \quad 4) y'' + 4y' + 3y = e^{-3t}; y(0) = 0, y'(0) = 2$$

$$5) y'' - 4y' + 4y = e^t; y(0) = 0, y'(0) = -1 \quad 6) y'' + 4y' + 4y = e^{-3t}; y(0) = 0, y'(0) = 2$$

$$7) y'' - 3y' + 2y = t; y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad 8) y'' + 4y' + 3y = t; y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Câu 10*. Dùng biến đổi Laplace giải các phương trình vi phân cấp hai sau

$$1) y'' - 2y' + 5y = 3; y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad 2) y'' + 4y' + 8y = -1; y(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$3) y'' + 4y = te^t; y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad 4) y'' + 9y = te^{-3t}; y(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$5) y'' - 4y' + 4y = t; y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad 6) y'' + 6y' + 9y = 2t; y(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$7) y'' - 2y' + 5y = 3t; y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad 8) y'' + 4y' + 8y = -t; y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Câu 11. Dùng biến đổi Laplace giải các hệ phương trình vi phân cấp một sau

$$1) \begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = y - 2x \end{cases}; x(0) = 8, y(0) = 3$$

$$2) \begin{cases} x' + 4x + 4y = 0 \\ y' + 2x + 6y = 0 \end{cases}; x(0) = 3, y(0) = 15$$

$$3) \begin{cases} x' + 3x - 4y = 9e^{2t} \\ y' + 2x - 3y = 3e^{2t} \end{cases}; x(0) = 2, y(0) = 0$$

$$4) \begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t \\ y' + x + 2y = \sin t \end{cases}; x(0) = y(0) = 0$$

.....Hết.....